PublicacionesDidácticas
www.publicacionesdidacticas.com

Funciones recíprocas de las funciones circulares. Funciones hiperbólicas y sus recíprocas. Situaciones en las que aparecen

Título: Funciones recíprocas de las funciones circulares. Funciones hiperbólicas y sus recíprocas. Situaciones en las que aparecen. **Target**: Profesores de Matemáticas.. **Asignatura**: Matemáticas. Trigonometría.. **Autor**: Emiliana Oliván Calzada, Licenciada en Matemáticas, Profesora de Matemáticas en Educación Secundaria.

1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS.

Las funciones trigonométricas no son biyectivas, por lo que hay que restringirlas a intervalos convenientes para que existan las recíprocas.

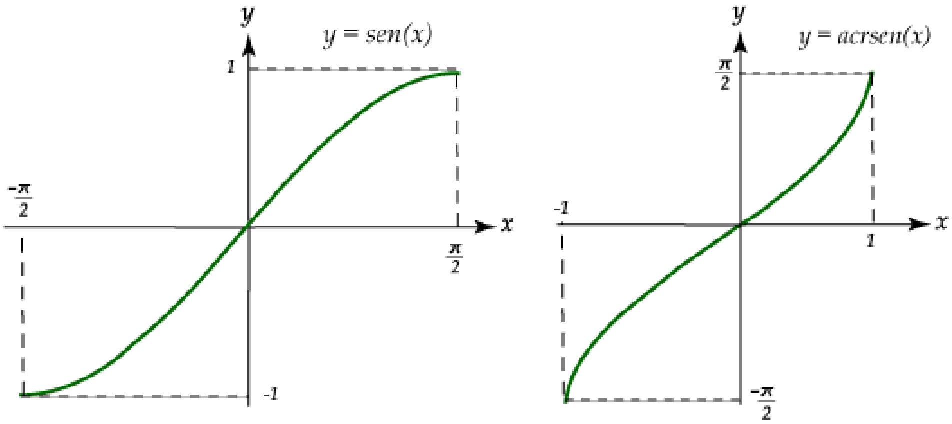
A. *La función arco seno*

La función
$$\begin{aligned} f:\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] &\to [-1,1] \\ x &\to f(x)=senx \end{aligned}$$
es biyectiva.

Entonces podemos definir la función recíproca f^{-1} llamada arco seno, denotada $arcsen$ como:

$$\begin{aligned} f^{-1}=arcsen:[-1,\,1] &\to \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ x &\to arcsen(x)\equiv arcsenx \end{aligned}.$$

Su gráfica es simétrica de la gráfica $senx$ respecto de la bisectriz del primer cuadrante.



Su derivada es $\left(arcsenx\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Demostración:

$$f(x) = senx \to f'(x) = \cos x \underset{f^{-1}(x)=arcsenx}{\to} f'\left(f^{-1}(x)\right) = \cos(arcsenx).$$

Ahora bien:

$$sen^2(arcsenx) + \cos^2(arcsenx) = 1$$

$$\to \cos^2(arcsenx) = 1 - x^2 \to \cos(arcsenx) = \pm\sqrt{1-x^2} \underset{f^{-1}\ creciente}{=} \sqrt{1-x^2}$$

Luego tenemos que $f'\left(f^{-1}(x)\right) = \cos(arcsenx) = \sqrt{1-x^2}$. Y como:

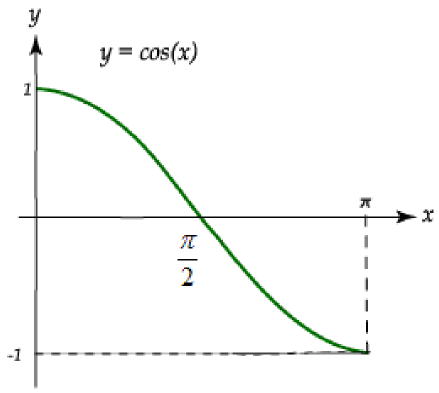
$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \to \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \left(arcsenx\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

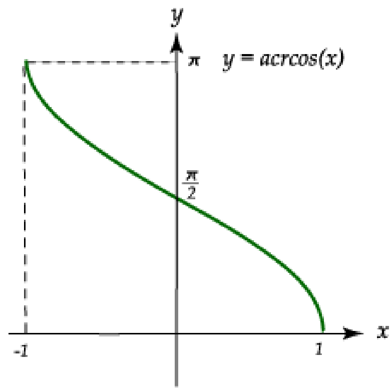
B. *La función arco coseno*

La función $\begin{array}{l} f:[0,\pi] \to [-1,1] \\ \quad x \quad \to f(x) = \cos x \end{array}$ es biyectiva. Así, podemos definir la función recíproca f^{-1} llamada arco coseno, denotada $arc\cos$ como:

$$f^{-1} = arc\cos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$x \quad \to f^{-1}(x) = arc\cos(x) \equiv arc\cos x$$

Su gráfica es:





Su derivada es $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Demostración</u>: Análoga a la de la función anterior.

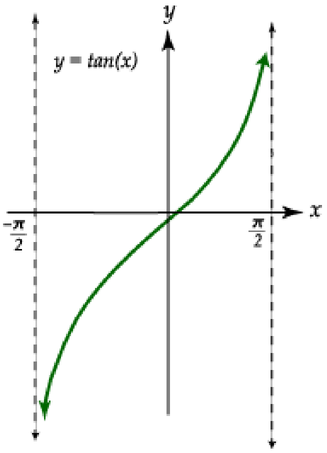
C. <u>*La función arco tangente*</u>

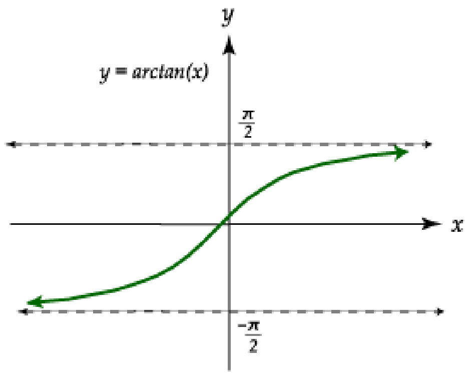
La función $f : \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to R$ es biyectiva.
$$x \quad \to f(x) = tgx$$

Así, podemos definir la función recíproca f^{-1} llamada arco tangente y denotada $arctg$ como:

$$f^{-1} = arctg : R \to \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$$
$$x \quad \to arctg(x) \equiv arctgx$$

. Su gráfica es simétrica de la gráfica de la función tgx respecto de la bisectriz del primer cuadrante.





Su derivada es: $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

<u>Demostración</u>:

$$f(x) = tgx \rightarrow f'(x) = 1 + tg^2 x \rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right) \underset{f^{-1}(x)=arctgx}{=} 1 + tg^2(arctgx) = 1 + x^2$$

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \Rightarrow (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

<u>Nota</u>: Análogamente podemos estudiar las funciones recíprocas del resto de funciones trigonométricas.

2. FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

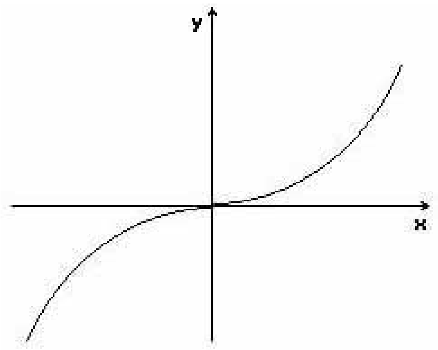
La circunferencia goniométrica tiene como ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y sus ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x = \cos t \\ y = sent \end{cases}$. Por eso las funciones seno y coseno reciben el nombre de funciones circulares.

Análogamente, una hipérbola tiene como ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y sus ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x = aCht \\ y = bSht \end{cases}$, siendo Sht el seno hiperbólico de t y Cht el coseno hiperbólico de t. Estas funciones son funciones hiperbólicas.

A. La función seno hiperbólico

Definimos la función seno hiperbólico, denotada Sh, $\begin{array}{l} f : R \to R \\ x \to Shx \end{array}$ como:

$Shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Notar que $Shx = -Sh(-x)$ luego es una función impar. Su gráfica es:

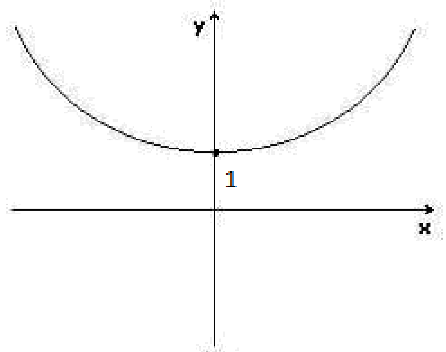


Su derivada es $(Shx)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \equiv Chx$ (lo definiremos a continuación).

B. La función coseno hiperbólico

Definimos la función coseno hiperbólico, denotada Ch, como: $Chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Es una función par, $Ch(x) = Ch(-x)$ su gráfica es:



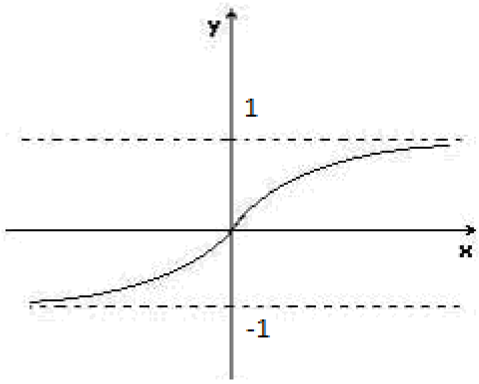
Su derivada es: $(Chx)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = Shx$.

Propiedad: $Ch^2x - Sh^2x = 1$. Demostración: Inmediata por definición.

D. La función tangente hiperbólica

Definimos la función tangente hiperbólica, $f : R \to (-1, 1)$, denotada Th como:

$Thx = \frac{Shx}{Chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Es una función impar, ya que, $Th(x) = -Th(-x)$. Su gráfica es:

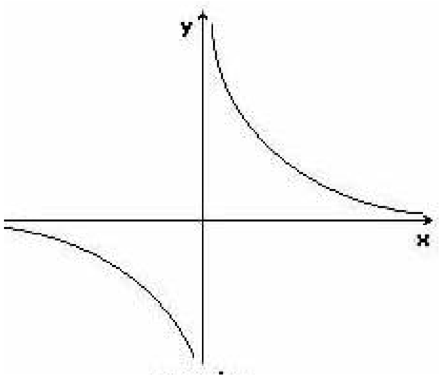


Su derivada es: $(Thx)' = \frac{Ch^2x - Sh^2x}{Ch^2x} = \frac{1}{Ch^2x}$.

D. La función cosecante hiperbólica

Definimos la función cosecante hiperbólica denotada $Cosech$ como: $Cosechx = \frac{1}{Shx}$.

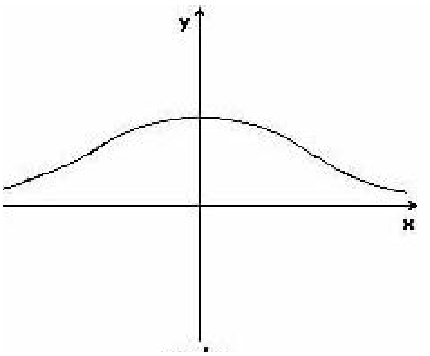
Su gráfica es:



Su derivada es: $\left(Co\sec hx\right)' = \dfrac{-Chx}{Sh^2x}$.

E. La función secante hiperbólica:

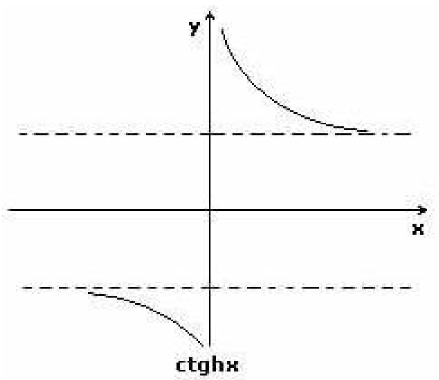
Definimos la función secante hiperbólica denotada $Sech$ como: $Sechx = \dfrac{1}{Chx}$. Su gráfica es:



Su derivada es: $\left(Sechx\right)' = \dfrac{-Shx}{Ch^2x}$.

E. La función cotangente hiperbólica

Definimos la función cotangente hiperbólica denotada $Cotgh$ como: $Cotghx = \dfrac{1}{Thx} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{Chx}{Shx}$. Su gráfica es:



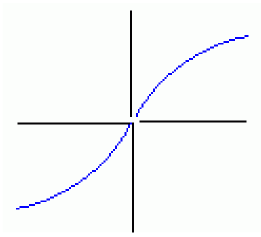
Su derivada es: $(Cotghx)' = \dfrac{-1}{Sh^2 x}$.

3. <u>FUNCIONES RECÍPROCAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS</u>.

A. <u>La función argumento seno hiperbólico</u>

La función $\begin{array}{l} f : R \to R \\ x \to f(x) = Shx \end{array}$ es biyectiva. Así, podemos definir su función recíproca f^{-1} llamada argumento seno hiperbólico denotada $\arg Sh$ como: $\begin{array}{l} f^{-1} = \arg Sh : R \to R \\ \qquad\qquad x \quad \to \arg Sh(x) \equiv \arg Shx \end{array}$.

Su gráfica viene dada por:



Veamos otra forma de expresarla:

$$y = \arg Shx \Leftrightarrow x = Shy = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \to 2x = \frac{e^y\left(e^y - e^{-y}\right)}{e^y} \to e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \to$$

$$\to e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \underset{e^y > 0}{\to} e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \to y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad \forall x \in R$$

. Su derivada es: $(\arg Shx)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

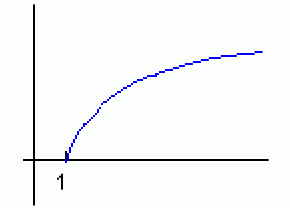
Veámoslo:

$$(\arg Shx)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

B. <u>La función argumento coseno hiperbólico</u>

La función $\begin{array}{l} f:[0,+\infty)\to[1,+\infty) \\ \quad x \ \to f(x)=Chx \end{array}$ es biyectiva. Así podemos definir su función recíproca f^{-1} llamada argumento coseno hiperbólica, denotada $\arg Ch$ como: $\begin{array}{l} f^{-1}=\arg Ch:[1,+\infty)\to[0,+\infty) \\ \qquad\qquad x \ \to \ \arg Ch(x)\equiv\arg Chx \end{array}$

Su gráfica es:



Análogamente al caso anterior vemos que $\arg Chx=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $\forall x\geq 1$ (porque para que $f(x)=Chx$ sea biyectiva hay que restringir el dominio a $[0,+\infty)$.

Tomando $\arg Chx=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ $\forall x\geq 1$ obtenemos la otra rama, en este caso el dominio de f es $(-\infty,0]$.

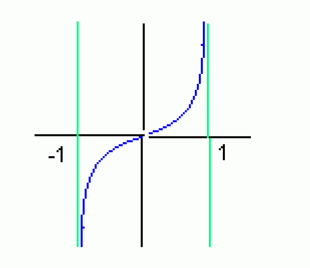
Su derivada es: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\forall x>1$. Veámoslo:

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1\cdot 2x}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

C. <u>La función argumento tangente hiperbólica</u>

La función $\begin{array}{l} f:R\to R \\ x\to f(x)=Thx \end{array}$ es biyectiva. Así podemos definir la función recíproca f^{-1} llamada argumento de la tangente hiperbólica, denotada $\arg Th$ como:

$$f^{-1}:\arg Th:(-1,1)\to R$$
$$x\to \arg Th(x)\equiv \arg Thx$$
. Su gráfica es:



Veamos otra forma de expresarla:

$$y=\arg Thx \Leftrightarrow x=Thy=\frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}}=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}\Leftrightarrow x\cdot e^{2y}+x=e^{2y}-1\Leftrightarrow e^{2y}(1-x)=x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2y}=\frac{x+1}{1-x}\underset{x\in(-1,1)}{\underset{\downarrow}{>}}0\to 2y=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Rightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\quad -1<x<1$$

Su derivada es: $y'=\dfrac{1}{1-x^{2}}$. Veámoslo:

$$y'=(\arg Thx)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\left[\frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^{2}}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1-x^{2}}=\frac{1}{1-x^{2}}.$$

4. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN.

Aplicaciones de las funciones hiperbólicas

1.- Para resolver integrales de funciones irracionales.

2.- Para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.- En el movimiento descendente de un cuerpo.

NOTA: Las funciones circulares e hiperbólicas se utilizan en la mayoría de campos de otras ciencias.

Gaudí utilizó las funciones hiperbólicas. Ejemplo: Casa Mila, La Pedrera.

La función Chx se utiliza en la estructura arquitectónica del Arco Gateway en St Louis Missouri.

5. ASPECTOS DIDÁCTICOS.

Parte de los contenidos tratados en este tema aparecen en el programa de matemáticas I de 1º Bachillerato.

Las funciones hiperbólicas no están incluidas en los programas de Bachillerato.

El estudio de las recíprocas de las funciones circulares es útil para que los alumnos resuelvan ecuaciones trigonométricas y para que vean que sus gráficas son simétricas de las gráficas de las funciones circulares. ●

Bibliografía

Pisot-Zamansky. Matemáticas generales.

Shervatov, V.G. Funciones hiperbólicas.

Ayres,F. Cálculo diferencial.

Spivak, M. Calculus.